

Circuit électrique en régime permanent

I- Lois fondamentales

- On appelle dipôle tout élément du circuit compris entre 2 pôles (2 bornes). Exemples de dipôles : résistance, condensateur, bobine, ... Exemples de tripôles : transistor, AOP (Ampli OP)
- Un courant électrique est une circulation de charges (souvent des électrons). L'intensité est définie par la quantité de charges positives passant à travers une section du circuit par unité de temps : $I = \frac{Q}{t}$ ou $i = \frac{dq}{dt}$.
- On appelle tension électrique entre 2 points, notée U_{AB} , la différence de potentiel entre A et B : $U_{AB} = V_A - V_B$.
- Un réseau est un ensemble de dipôles reliés par des fils conducteurs de résistance négligeable.
- Un nœud dans un réseau est un point relié à au moins 3 dipôles.
- Une branche dans un réseau est un ensemble de dipôles montés en série entre 2 nœuds.
- Une maille est un parcours fermé constitué de branches en ne passant qu'une seule fois par un nœud donné.

Lois de Kirchoff :

- 1) La somme algébrique des intensités arrivant ou s'éloignant d'un nœud est nulle : $\sum I_{noeud} = 0$.
- 2) La somme des tensions le long d'une maille est nulle : $\sum U_{maille} = 0$

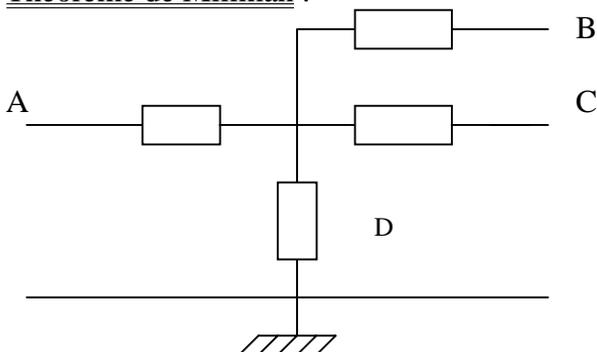
II- Dipôles actif et passif

- On dit qu'un dipôle est passif si l'énergie électrique des électrons sortant du dipôle est inférieure à celle des électrons sortants. Par convention, on choisit comme sens de l'intensité du courant le sens du mouvement des charges positives (sens contraire à celui des électrons...). Exemple : résistance.
- L'énergie électrique est : $E_p = q \cdot V = -e \cdot V$, ainsi U est positive si elle croise i (>0).
- Un dipôle est actif si les électrons qui le traversent gagnent de l'énergie. Exemple : pile.
- On appelle caractéristique d'un dipôle le graphe donnant la courbe de l'intensité en fonction de la tension.
- On associe les différentes caractéristiques (générateur et récepteur) pour trouver le point de fonctionnement à leur intersection. Ce point donne la tension et l'intensité dans le réseau.

Théorème de Thévenin-Norton : Tout réseau d'éléments linéaires, pris entre 2 points A et B, est équivalent à une source de Thévenin (générateur de tension) ou à une source de Norton (générateur de courant) : $E_e = R_e \cdot I_e$
⇒ On obtient la résistance équivalente en remplaçant les générateurs de tension par des fils et les générateurs de courant par un circuit ouvert.

Théorème de superposition : Si un réseau ne comporte que des éléments linéaires et plusieurs générateurs, la distribution des intensités et des tensions dans le réseau est la somme des distributions dues à chacun à chacun des générateurs, pris séparément, les autres générateurs étant passivés.

Théorème de Millman :



$$V_M = \frac{\frac{V_A}{R_A} + \frac{V_B}{R_B} + \frac{V_C}{R_C} + \frac{0}{R_D}}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_D}}$$

I- Charge et décharge d'un condensateur

- Un condensateur possède une capacité C et est symbolisé par : 
- La capacité est mesurée en Farad (souvent nanoF et microF)
- On a $Q = \pm C.U_{AB}$ puis $i = \pm C. \frac{du}{dt}$.
- Charge du condensateur : Dans un circuit RC, on trouve grâce à la loi des mailles l'équation différentielle : $RC \frac{du}{dt} + u = E_0$. La solution de cette équation est : $u(t) = E_0.(1 - \exp(-\frac{t}{RC}))$. Pour $t = \infty$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.
- Décharge du condensateur : On trouve de même $u(t) = E_0.\exp(-\frac{t}{RC})$.

II- Passage du courant dans une bobine

- Etablissement du courant : Une bobine est un enroulement de spires et possède un coefficient d'inductance L et une résistance r . On la modélise par :  . On a : $u = L. \frac{di}{dt} + r.i$. On trouve alors pour un circuit RL une équation différentielle du type : $E_0 = (R+r).i + L. \frac{di}{dt}$ soit $i = \frac{E_0}{R+r} (1 - \exp(-\frac{R+r}{L}.t))$. Pour $t = 0$, la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert. Pour $t = \infty$, la bobine se comporte comme un fil.

III- Aspect énergétique

- Charge d'un condensateur : $E = \int_{t=0}^{\infty} (C.u. \frac{du}{dt}).dt = \int_{t=0}^{\infty} C.u.du = \frac{1}{2} C.E_0^2$. Ainsi, le condensateur stocke la moitié de l'énergie délivrée par le générateur.
- Passage du courant dans la bobine : $E = \int_{t=0}^{\infty} (C.i. \frac{di}{dt}).dt = \int_{t=0}^{\infty} C.u.di = \frac{1}{2} L.I^2$.

I- Régime transitoire du circuit RLC

- Dans un circuit RLC, on trouve une équation différentielle du type : $L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$.

On résout l'équation caractéristique : $L \cdot s^2 + R \cdot s + \frac{1}{C} = 0$ de discriminant $\Delta = R^2 - 4 \cdot \frac{L}{C}$.

- Régime apériodique : $\Delta > 0$ (2 racines réelles)

$s = \frac{1}{2L} \cdot (-R \pm \sqrt{\Delta})$. Les solutions sont du type : $q(t) = A_1 \cdot \exp(s_1 \cdot t) + A_2 \cdot \exp(s_2 \cdot t)$.

- Régime critique : $\Delta = 0$ (1 racine double)

$s = -\frac{R}{2L}$. Les solutions sont du type : $q(t) = (A + B \cdot t) \cdot \exp(s \cdot t)$.

- Régime pseudo-périodique : $\Delta < 0$ (2 racines complexes)

$s = \frac{1}{2L} \cdot (-R \pm j \cdot \sqrt{-\Delta})$. Les solutions sont du type : $q(t) = (A_1 \cdot \exp(j \cdot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2L} \cdot t) + A_2 \cdot \exp(j \cdot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2L} \cdot t)) \cdot \exp(-\frac{R \cdot t}{2L})$

ou encore $q(t) = K \cdot \cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2L} \cdot t + \varphi) \cdot \exp(-\frac{R \cdot t}{2L})$

II- Circuit RLC en régime sinusoïdal forcé

- On a une équation différentielle du type : $L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$

- On recherche une solution du type : $q(t) = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha)$. On se sert des complexes, et on trouve :

$$E_0 = A \cdot \left[\left(\frac{1}{C} - L \cdot \omega^2 \right) + j \cdot r \cdot \omega \right] \cdot e^{j\alpha}$$

- On cherche donc A et α tels que : $A \cdot e^{j\alpha} = \frac{E_0}{\left[\left(\frac{1}{C} - L \cdot \omega^2 \right) + j \cdot r \cdot \omega \right]}$

$$\text{D'où } \alpha = -\text{Arc tan}\left(\frac{R \cdot \omega}{\frac{1}{C} - L \cdot \omega^2}\right) \quad \text{et} \quad A = \frac{E_0^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - L \cdot \omega^2\right)^2 + R^2 \cdot \omega^2}}$$

A passe par un max si $\omega^2 = \frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{2 \cdot L^2}$. On observe une surtension aux bornes du condensateur si $\frac{R^2}{2 \cdot L^2} < \frac{1}{L \cdot C}$

- La résonance en intensité s'observe toujours en prenant la tension aux bornes de la résistance pour $L \cdot C \cdot \omega^2 = 0$.

- La bande passante d'un circuit RLC est un intervalle de fréquence (ou de pulsation) pour lequel l'amplitude

est supérieur à $\frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$. Or $I_{\max} = I(\omega = \omega_0) = \frac{E_0}{R}$. On trouve : $\left(\frac{1}{C \cdot \omega} - L \cdot \omega^2 \right)^2 = R^2$. On définit alors le

$$\text{facteur de qualité} : Q = \frac{\omega_0}{\Delta \omega} = \frac{L \cdot \omega_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{R \cdot C \cdot \omega_0}$$

- On peut aussi obtenir la forme normalisée : $I(\omega) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{1 + Q^2 \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}}$

- On observe une surtension aux bornes du condensateur si le facteur de qualité est élevé $> \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Chapitre 4

Etude des circuits en régime périodique forcé

I- Développement en série de Fourier

- on considère $s(t)$ un signal périodique de période T_0 . On admet que ce signal se décompose en une somme de signaux sinusoïdaux (série de Fourier) sous la forme : $s(t) = s_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t))$

avec $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ et $s_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t).dt$ la valeur moyenne de $s(t)$.

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cos(n\omega_0 t).dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \sin(n\omega_0 t).dt$$

- On trouve aussi en regroupant les cos et les sin en un unique cos : $s(t) = s_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n)$

avec $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ (l'ensemble des c_n est appelé spectre du signal, c_1 le fondamental et les autres les harmoniques) et $\varphi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}$.

II- Impédance complexe

- On associe une grandeur réelle de la forme $\underline{u}(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ à une grandeur complexe de la forme : $\underline{u}(t) = U_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$.

- Impédance complexe d'un condensateur : $\frac{\underline{u}_C(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{1}{j.C.\omega}$

- Impédance complexe d'une bobine : $\frac{\underline{u}_B(t)}{\underline{i}(t)} = j.L.\omega$

III- Puissance en régime sinusoïdal

- On cherche P la puissance d'une résistance parcourue par un courant d'intensité sinusoïdale : Soit $P(t)$ la

puissance instantanée on a : $P = \langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} P(t).dt$. Pour une résistance : $P = \frac{R.I_0^2}{2} = \frac{R.I_0}{\sqrt{2}} \times \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

- En régime sinusoïdal, la tension (ou l'intensité) efficace est définie par le rapport de l'amplitude de tension (ou d'intensité) sur $\sqrt{2}$. En régime quelconque, la tension (intensité) efficace est la valeur de la tension (intensité) continue qui dans la même résistance conduit au même effet joule : $U_{\text{eff}} = \sqrt{\langle u^2(t) \rangle}$

- L'argument de l'impédance complexe Z donne le déphasage φ (tension / intensité) et on a :

$$P = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos(\varphi) \quad \cos(\varphi) \text{ est appelé } \underline{\text{facteur de puissance}}.$$

- EDF facture la puissance moyenne consommée par une installation électrique, soit en fait l'intensité moyenne délivrée. $U_{\text{eff}} = 220 \text{ V}$.

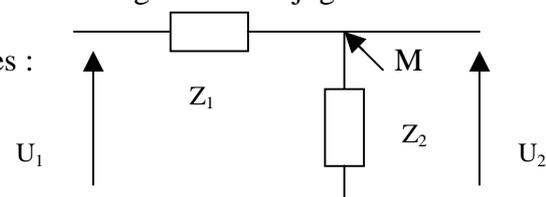
$U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos(\varphi)$ est la puissance moyenne (ou active) et $U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \sin(\varphi)$ est la puissance réductrice Q_r .

EDF impose une norme sur le facteur de puissance égale à 0,86.

- La puissance transférée est maximale si l'impédance complexe du dipôle de charge est le conjugué de l'impédance du générateur.

- On appelle diviseur de tension une structure constituée de 2 impédances :

$$\text{D'après le théorème de Millman : } V_M = U_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} U_1$$



I- Généralités

- un filtre se présente souvent sous forme de quadripôle. On définit 2 grandeurs d'entrée (u_e et i_e) et 2 grandeurs de sortie (u_s et i_s).
- La fonction de transfert est le rapport d'une grandeur de sortie sur une grandeur d'entrée. On peut considérer : $\frac{u_s}{u_e}$ le gain en tension, $\frac{i_s}{i_e}$ le gain en intensité, $\frac{u_s}{i_e}$ l'impédance de transfert et $\frac{i_s}{u_e}$ l'admittance de transfert.
- Le filtre est caractérisé par deux impédances : $\frac{u_e}{i_e}$ (entrée) et $\frac{u_s}{i_s}$ (sortie).
- Lors de la mise en cascade de filtres, on a $H \neq H_1.H_2$. Pour mettre en cascade (coupler) plusieurs filtres, on utilise des AOP montés en suiveur, ou les AOP inclus dans les filtres.

II- Filtre du premier ordre

- Filtre passe-bas : On a un diviseur de tension avec $Z_1 = R$ et $Z_2 = (jC\omega)^{-1}$. Le gain en tension de ce filtre est : $H(j\omega) = \frac{1}{1 + j.R.C.\omega}$. On pose $\omega_c = \frac{1}{RC}$ (pulsation de coupure). Pour des pulsations basses, le gain est nul, il n'y a pas de pertes; pour $\omega = \omega_c$, on a une chute de 3 dB; et après, on a une droite de pente -20 dB/décade.
- Filtre passe-haut : On a un diviseur de tension avec $Z_1 = (jC\omega)^{-1}$ et $Z_2 = R$. Le gain en tension de ce filtre est : $H(j\omega) = j \frac{\omega}{\omega_c} \times \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$. Avec $\omega_c = \frac{1}{RC}$. On a le même digramme de Bode que pour un filtre passe-bas, mais "inversée", en effet, le gain est à peu près nul pour les pulsation supérieures à la pulsation de coupure...
- On appelle pôle simple ou pôle du premier ordre dans la fonction de transfert, un terme de la forme $\frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$.

On connaît le diagramme de Bode asymptotique de ce pôle simple, on peut alors en déduire celui de la fonction de transfert.

III- Filtre du second ordre

- Une fonction de transfert peut se factoriser sous forme d'un produit de pôles simples ou de pôles de 2nd ordre.
- Filtre passe-bas du 2nd ordre : On a un diviseur de tension avec $Z_1 = R + j.L.\omega$ et $Z_2 = (jC\omega)^{-1}$. Le gain en tension de ce filtre est : $H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2.j.m \frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j.\omega}{\omega_0}\right)^2}$ avec $(\omega_0)^2 = \frac{1}{LC}$ et $m = \frac{R.C.\omega_0}{2} = \frac{1}{2.Q}$.

On doit d'abord chercher le comportement asymptotique. Ensuite on voit si on peut ou non factoriser : Si $m > 1$, alors le polynôme se factorise et on peut trouver 2 pulsations de coupure. Si $m < 1$, alors les racines sont complexes et ne représentent plus des pulsations de coupure et on passe par un maximum.

- Filtre passe-bande : On a un diviseur de tension avec $Z_1 = (jC\omega)^{-1} + j.L.\omega$ et $Z_2 = R$. Le gain en tension de ce filtre est : $H(j\omega) = \frac{2.j.m \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2.j.m \frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j.\omega}{\omega_0}\right)^2}$ avec $(\omega_0)^2 = \frac{1}{LC}$ et $m = \frac{R.C.\omega_0}{2} = \frac{1}{2.Q}$.
- Les comportements asymptotiques montrent qu'on a un filtre passe-haut jusqu'à ω_0 puis un filtre passe-bas...

Chapitre 1

Cinématique

I- Notion d'espace et de temps

- L'espace physique en mécanique classique est euclidien : on peut définir un repère orthonormé. Cet espace est limité par la théorie de la mécanique quantique (échelle atomique et sub-atomique) et de la mécanique relativiste (vitesse proche de $c = 300\,000\text{ km/s}$)
- En mécanique classique, le temps s'écoule de manière unidirectionnelle et uniforme. La seconde est définie à partir de l'émission des noyaux d'atomes de césium 134.

II- Référentiels

- Le repère cartésien $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est orthonormé et direct.
- Le repère cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est défini à partir du repère cartésien : $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ et $r = OM$.

$$\text{On a : } \begin{array}{ll} x = r \cdot \cos(\theta) & \text{soit } r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y = r \cdot \sin(\theta) & \theta = \text{Arctan } \frac{y}{x} \end{array}$$

- Le repère sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$ est défini à partir du repère cartésien : $\theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM})$ la colatitude, $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OH})$ la longitude et $r = OM$.

$$\text{On a : } \begin{array}{lll} x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi & \text{soit} & r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi & & \varphi = \text{Arctan } \frac{y}{x} \\ z = r \cdot \cos \theta & & \theta = \text{Arctan } \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \end{array}$$

III- Expression des vitesses et accélération en référentiel cylindrique

- En référentiel cartésien : $\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z$ et $\vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y + \ddot{z} \vec{e}_z$
- En référentiel cylindrique : $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$, $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$ et $\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{e}_r + z \cdot \vec{e}_z$
D'où : $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \cdot \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z$ et $\vec{a} = (\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta} + r \cdot \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z$
- En référentiel sphérique : $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \cdot \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

IV- Repère de Frenet

- Ce repère lié à la trajectoire permet d'accéder au rayon de courbure R_c . On définit l'abscisse curviligne s de M par la distance parcourue par M sur la trajectoire à partir d'un point origine. Ce repère est noté $(M, \vec{T}, \vec{N}, \vec{T} \wedge \vec{N})$.

- On a : $\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{T}$. Dans le cas d'un mouvement circulaire, on décompose l'accélération en 2 parties :

$$\text{l'accélération tangentielle } a_T = \frac{dv}{dt} \text{ et l'accélération normale } a_N = \frac{V^2}{R_c}.$$

V- Composition de mouvements

- Vitesse absolue : $\vec{V}_{(M)/R} = \vec{V}_{relative} + \vec{V}_{entraînement} = \vec{V}_{(M)/Rm} + \vec{V}_{Om} + \vec{\omega} \wedge \vec{OmM}$

- Accélération absolue : $\vec{a}_{(M)/R} = \vec{a}_{relative} + \vec{a}_{entraînement} + \vec{a}_{coriolis}$
 $= \vec{a}_{(M)/Rm} + \vec{a}_{Om} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OmM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OmM}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_{(M)/Rm}$

VI- Exemples (Mouvement circulaire uniforme)

- $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + \omega \cdot r \cdot \vec{e}_\theta$ avec $\omega = \dot{\theta}$. Donc $\vec{V}_{a/Rm} = \omega \cdot r \cdot \vec{e}_\theta$.

- Dans le repère de Frenet, on a : $\vec{a}_a = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{V^2}{R_c} \vec{N}$. Dans le référentiel mobile, $\vec{a} = \frac{V^2}{R_c} \vec{N} = -\omega^2 \cdot r \cdot \vec{e}_r$.

On trouve donc $\vec{a}_e = -\omega^2 \cdot r \cdot \vec{e}_r$, $\vec{a}_c = 2\omega \cdot \dot{r} \cdot \vec{e}_\theta$ et $\vec{a}_r = \ddot{r} \cdot \vec{e}_r$. Puis $\vec{a} = (\ddot{r} - \omega^2 \cdot r) \cdot \vec{e}_r + 2\omega \cdot \dot{r} \cdot \vec{e}_\theta$.

Principes de la dynamique du point

I- Considérations historiques

- Nicolas Copernic (Pologne : 1473-1543), Képler Johannes (Allemagne : 1571-1630), Galileo Galilei (Italie : 1564-1642), Newton Isaac (Angleterre : 1642-1727)

II- Principes

- Principe de Galilée : la modification du mouvement d'un corps est dues à des forces.
- Principe Fondamental de la dynamique (PFD) : $\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \sum \overrightarrow{Forces}$
- Il y a de nombreuses forces : forces de contact (entre solides, entre solide et fluide), forces à distance (attraction gravitationnelle, électrostatique, magnétique, interaction faible/forte)

III- Principe fondamental de la dynamique (PFD)

- Le PFD ne s'applique que dans un référentiel galiléen. Si la masse du système reste constante, alors, le PFD s'écrit : $\sum \overrightarrow{Forces} = m\vec{a}$
- En référentiel non galiléen, le PFD s'écrit : $\sum \overrightarrow{Forces} = m(\vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c)$. On assimile $-m\vec{a}_e$ et $-m\vec{a}_c$ a des forces. On les appelle forces d'inertie (d'entraînement et de Coriolis).

Corollaire : Si 2 référentiels sont en translation rectiligne uniforme, alors si l'un est galiléen, l'autre l'est également...

IV- Applications directes du PFD

- Mouvement de projectiles dans le champ de pesanteur, on a : $z = x \cdot \tan \alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} \right)^2$.
——> Parabole de sûreté : cas limite de la trajectoire pour atteindre un point.
- Mouvement d'un contrepoids sur une tige en rotation
- Mouvement cyclotron, on trouve $\omega_c = \frac{q \cdot B}{m}$ pulsation du cyclotron. Si on associe à ce mouvement un champ électrique, on obtient une trochoïde.
- Précession de Larmor : on prend $\vec{\omega} = -\frac{\vec{\omega}_c}{2} = -\frac{q \cdot \vec{B}}{2 \cdot m}$. On obtient : $m \cdot \vec{a}_r = \vec{F} - \frac{q^2 \cdot B^2}{4 \cdot m} \vec{r}$.

Remarque : la précession de l'orbite de Mercure n'est expliquée que par la théorie de la relativité.

I- Puissance et Travail

- On définit la puissance d'une force par : $\vec{P} = \vec{F} \cdot \vec{V}$ [Watt = W] = [N.m.s⁻¹]. La puissance dépend du référentiel. Certaines forces n'ont aucune puissance. Exemples : Forces de Lorentz et de Coriolis.
- Le travail exercé par une force \vec{F} sur un objet ponctuel est défini par : $W_{A \rightarrow B} = \int_A^B P \cdot dt = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{V} \cdot dt$

II- Energie

- L'énergie potentielle est définie à partir du travail d'une force : elle correspond à l'énergie "emmagasinée" susceptible d'être potentiellement transformée en énergie cinétique. Les forces qui engendrent une énergie potentielle sont dites conservatives.
- On a : \vec{F} est conservative ssi $\vec{F} = -\vec{grad}E_p = -\vec{\nabla}E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} dx \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz \cdot \vec{e}_z \right)$ ou encore $dE_p(x, y, z) = -\vec{F} \cdot \vec{V} \cdot dt$.
- Si une force est conservative, alors $W_{A \rightarrow B} = \int_A^B P \cdot dt = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{V} \cdot dt = \int_A^B -dE_p = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B)$.
- Exemples : Energie potentielle de pesanteur (m.g.z + cte), d'interaction gravitationnelle ($-\frac{G.M.m}{r} + cte$), élastique ($\frac{1}{2}k.(x - x_0)^2 + cte$), électrique (-q.E.x + cte), centrifuge ($-\frac{1}{2}m.\omega^2.r^2 + cte$)

III- Energie cinétique et mécanique

Théorème de l'énergie cinétique : La variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces s'appliquant au système de masse constante : $\Delta E_c = W$.

Théorème de l'énergie mécanique : $\Delta E_m = \Delta(E_c + E_p) = W_{frottements}$

Corollaires : Un système de masse constante soumis uniquement à des forces conservatives possède une énergie mécanique constante. De plus, $\frac{dE_m}{dt} = P_{frottements}$: La dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique est égale à la puissance des forces conservatives.

- Le théorème de l'énergie mécanique ne s'emploie que pour des systèmes à un seul degré de liberté.

I- Le moment cinétique

- On considère un référentiel (O,xyz) et un point A en mouvement de vitesse $\vec{V}_{A/R}$. On appelle moment cinétique du point A par rapport au point O dans le référentiel R la quantité : $L_{O A/R} = \vec{OA} \wedge m \vec{V}_{A/R}$.

Théorème du moment cinétique : $\frac{d}{dt}(\vec{L}_{O A/R}) = \sum \vec{OA} \wedge \vec{F} = \sum \vec{M}_O(F) = [\text{Somme des moments des forces}]$

II- L'oscillateur harmonique

- Un oscillateur harmonique est un système physique à un degré de liberté dont l'équation différentielle est de la forme $\ddot{x} = -\omega_0^2 \cdot x$ (ou $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \cdot \theta$)
- Pour un ressort (de constante k), on trouve $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.
- Les oscillateurs sont des systèmes à un degré de liberté, donc peuvent être étudiés avec l'énergie mécanique. On trouve $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{Z}^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot Z^2$. E_c et E_p sont en opposition de phase, on a un transfert d'énergie.
- On recherche les extremums d' E_p : les maximums correspondent à un équilibre instable, les minimums correspondent à un équilibre stable (avec puits de potentiel).

III- Oscillateur amorti par frottement fluide

- On trouve une équation différentielle du type : $m \cdot \ddot{x} + h \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$
- On peut alors faire un parallèle avec l'électricité (circuit RLC) : $x \equiv q$, $m \equiv L$, $h \equiv R$, $k \equiv \frac{1}{C}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C} \equiv \frac{k}{m}$.
D'où : $Q = \frac{1}{R \cdot C \cdot \omega_0} = \frac{L \cdot \omega_0}{R} \equiv \frac{m \cdot \omega_0}{h}$. Et les solutions sont de la forme : $x = A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t}$ (si $\Delta > 0$),
 $x = (A \cdot t + B) e^{-\alpha \cdot t}$ (si $\Delta = 0$) et $x = K \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) \cdot e^{-\alpha \cdot \omega_0 \cdot t}$ (si $\Delta < 0$, $s = -\alpha \cdot \omega_0 \pm \Omega \cdot j$, $\Omega = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \alpha^2}$)
- Le régime critique correspond à $Q_c = \frac{1}{2}$. L'énergie mécanique décroît de façon exponentielle sous la forme $E_m(t) = E_{m,0} \cdot \exp(-\frac{t}{\tau})$ avec $Q = \omega_0 \cdot \tau$.

IV- Oscillations forcées – Résonance

- On a une équation différentielle du type : $\ddot{X} + 2 \cdot \alpha \cdot \omega_0 \cdot \dot{X} + \omega_0^2 \cdot X = \omega_0^2 \cdot A_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$
- Solutions : Après un régime transitoire, l'oscillateur forcé oscille autour de sa propre position d'équilibre avec la même période que la sollicitation.
- On a, en passant aux complexes, une solution du type $\underline{X}(t) = X_0 \cdot e^{i(\omega \cdot t + \varphi)}$ avec :
 $X_0 = \frac{A_0}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + 4 \cdot \alpha^2 \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$ et $\varphi = -\text{Arc tan} \left(\frac{2 \cdot \alpha \cdot \omega \cdot \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$. L'argument de la vitesse s'annule à la résonance.

Chapitre 5

Système de 2 points : Forces centrales en $1/r^2$

I- Système de 2 points

- Soit 2 points A_1 et A_2 de masses m_1 et m_2 . On note G le barycentre du système : $m_1 \cdot \overrightarrow{GA_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{GA_2} = 0$
- R^* le référentiel barycentrique à pour origine G et est en translation par rapport à R.
- On a : $(m_1+m_2) \cdot \overrightarrow{V_G} = m_1 \cdot \overrightarrow{V_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_i} = \overrightarrow{V_i^*} + \overrightarrow{V_G}$.
- On appelle résultante cinétique d'un système la somme des quantités de mouvement de chaque point du système : $\overrightarrow{P} = m_1 \cdot \overrightarrow{V_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{V_2}$. Puis, on a : $\overrightarrow{P^*} = \vec{0}$. Donc $\overrightarrow{P_1^*} = -\overrightarrow{P_2^*} = \mu \cdot \overrightarrow{V_A}$ avec $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$ et $\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}$. Dans R^* , le moment cinétique vaut : $\overrightarrow{L^*} = \overrightarrow{GA} \wedge \mu \cdot \overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{A_2 A_1} \wedge \mu \cdot \overrightarrow{V_A}$. Donc $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{A_2 A_1}$.
- On peut exprimer l'énergie cinétique dans R^* : $E_c^* = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot (V_A)^2$.

II- Propriétés des forces centrales

- On peut réduire le problème à un corps : on remplace l'étude de A_1 et A_2 par celle de A (affecté de la masse μ) avec $\overrightarrow{GA_1} = \frac{\mu}{m_1} \overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GA_2} = \frac{\mu}{m_2} \overrightarrow{GA}$.
- Un système de deux points isolés en interaction par une force centrale possède un mouvement plan (moment cinétique du système constant). On a aussi $\overrightarrow{L^*} = \mu \cdot r^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e}_z = cte$, on appelle $C = r^2 \cdot \dot{\theta}$ la constante des aires.
- Si la force d'interaction est centrale et conservative, alors l'énergie mécanique du système est constante : $E_m = \frac{1}{2} \mu \cdot \dot{r}^2 + E_p \text{eff}(r) = cte$ avec $E_p \text{eff}(r) = E_p + \frac{\mu \cdot C^2}{2 \cdot r^2}$

III- Forces en $1/r^2$

- On pose une force de la forme $\overrightarrow{F} = -\frac{K}{r^2} \overrightarrow{er}$ ($K > 0 \Rightarrow$ attractive et $K < 0 \Rightarrow$ répulsive) qui dérive d'une énergie potentielle $E_p = -\frac{K}{r}$.
- Comme la force est centrale, le mouvement est plan et obéit à la constante des aires. On s'intéresse à l'énergie potentielle effective : $E_p \text{eff}(r) = \frac{\mu \cdot C^2}{2 \cdot r^2} - \frac{K}{r}$. Si la force est répulsive ($K < 0$), on observe un état libre. Si la force est attractive ($K > 0$) on observe un état libre (si $E_m > 0$) ou lié (si $E_m < 0$).

IV- Trajectoire des corps

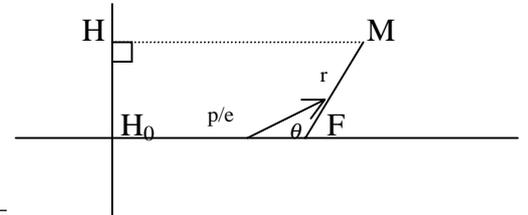
Formules de Binet : Soit $u = \frac{1}{r}$. Alors, on a : $\frac{dr}{dt} = -C \frac{du}{d\theta}$ et $\frac{d^2r}{dt^2} = -C^2 \cdot u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}$.

- En remplaçant dans l'équation donnée par le PFD, on obtient : $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{K}{\mu \cdot C^2}$.

- Les solutions sont de la forme $u = \frac{\pm 1}{p} + A \cdot \cos(\theta - \theta_0)$, soit encore : $r = \frac{p}{\pm 1 + e \cdot \cos(\theta - \theta_0)}$ avec $p = \frac{\mu \cdot C^2}{|K|}$
le paramètre et $e > 0$ l'excentricité.
- Etats libres : Si $e > 1$, on a une hyperbole. Si $e = 1$, on a une parabole.
- Etats liés : Si on a $e < 1$, on a une ellipse. Si $e = 0$, on a un cercle.
- On peut trouver un lien entre e et E_m : $e^2 = \frac{2 \cdot p^2}{\mu \cdot C^2} E_m + 1$

V- Les coniques

- M appartient à la conique si $\frac{FM}{HM} = e$. On a aussi $H_0F = \frac{p}{e}$
- L'équation de la conique en coordonnées polaires est : $r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \theta}$
- En coordonnées cartésiennes, on a :
 - Si $e = 1$, l'équation est $y^2 - 2 \cdot p \cdot x + p^2 = 0$.
 - Si $e < 1$, l'équation est : $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$; on retrouve une ellipse de demi axes $a = \frac{p}{1 - e^2}$ et $b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}$. On pose $c = \overline{FO} = \frac{p \cdot e}{1 - e^2} > 0$. On remarque : $c = a \cdot e$ et $a^2 = b^2 + c^2$.
 - Si $e > 1$, l'équation est : $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \frac{p}{e^2 - 1}$ et $b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}$. On pose : $c = \overline{OF} = \frac{p \cdot e}{e^2 - 1}$. On remarque encore que : $c = a \cdot e$ et $a^2 + b^2 = c^2$.



Propriétés remarquables : Dans une ellipse, on a : $FM + F'M = cte$. Dans une hyperbole, on a : $F'M - FM = cte$.

VI- Mouvement des planètes et des satellites

Lois de Képler :

- 1) Les centres des planètes décrivent des ellipses dont le soleil occupe un des foyers.
- 2) Le rayon vecteur balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.
- 3) Le rapport du carré de la période sur le cube du demi-grand axe est indépendant de la planète. En effet, on

néglige m devant M et on a : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot (M + m)} \approx \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$

- Les principaux outils pour un mouvement elliptique sont :

- $r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \theta}$, $p = \frac{\mu \cdot C^2}{|K|}$.
- La trajectoire possède 2 points particuliers $r_{\min} = \frac{p}{1 + e}$ et $r_{\max} = \frac{p}{1 - e}$ (apogée/aphélie et périogée/périhélie).
- D'où : $a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{p}{1 - e^2}$. On obtient ensuite $c = a - r_{\min} = a \cdot e$. Puis enfin $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Chapitre 6

Système de N points matériels : Application au solide en rotation

I- Éléments cinétiques d'un système de N points

- On considère N points matériels A_i , de masse m_i , de vitesse \vec{V}_i par rapport à un référentiel $R(O,xyz)$
- On note G le barycentre du système : $\sum m_i \cdot \vec{GA}_i = \vec{0}$; et $R^*(G,xyz)$ le référentiel barycentrique en translation par rapport à R à la vitesse \vec{V}_G .
- La résultante cinétique est la somme des quantités de mouvement de chaque point : $\vec{P} = \sum m_i \cdot \vec{V}_i$, $\vec{P}^* = \vec{0}$.
En fait, on trouve: $\vec{P} = M \cdot \vec{V}_G$ (M est la masse totale du système).
- Le moment cinétique du système est la somme des moments cinétiques de chaque point : $\vec{L}_{O/R} = \sum \vec{OA}_i \wedge m_i \cdot \vec{V}_i$.

1^{er} Théorème de König : Le moment cinétique d'un système de N points dans R par rapport à O est égal à la somme du moment cinétique barycentrique et du moment cinétique du barycentre G affecté de la masse totale dans R par rapport à O : $\vec{L}_{O/R} = \vec{L}^* + \vec{OG} \wedge M \cdot \vec{V}_G = \vec{L}^* + \vec{OG} \wedge \vec{P}$

2nd Théorème de König : L'énergie cinétique d'un système de N points dans R est égale à la somme de l'énergie cinétique barycentrique et de l'énergie cinétique du barycentre dans R affecté de la masse totale : $E_c = E_c^* + \frac{1}{2} M \cdot V_G^2$

II- Lois générales de la dynamique d'un système de N points

- \vec{F}_i représente la somme des forces extérieures au système agissant sur A_i et \vec{F}_{ij} la force d'interaction entre A_i et A_j . D'après le principe d'action et de réaction, on a : $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

Théorème de la résultante cinétique : La dérivée par rapport au temps de la résultante cinétique d'un système de points est égale à la somme des forces extérieures agissant sur le système : $\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_i$.

Théorème du moment cinétique : La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un système de points est égale à la somme des moments des forces extérieures agissant sur le système : $\frac{d\vec{L}_{O/R}}{dt} = \sum \vec{OA}_i \wedge \vec{F}_i$

Théorème de l'énergie cinétique : La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un système de points est égale à la puissance de toutes les forces (extérieures et intérieures) : $\frac{d}{dt}(E_c) = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{V}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{V}_i$.

Remarque : Dans la somme double, on remarque que la puissance est nulle si $\vec{A}_j \vec{A}_i$ est constant, donc si le système est indéformable (\equiv solide).

- Si les forces d'interaction sont conservatives, on peut écrire l'énergie potentielle d'interaction du système de points : $E_p = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{i \neq j} E_{p_{ij}}$.

III- Applications au solide en rotation autour d'un axe fixe

- On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ à vitesse angulaire $\vec{\omega}$. La vitesse d'un point A_i du solide s'écrit $\vec{V}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{OA}_i$, O étant un point de l'axe de rotation. On appelle H_i le projeté de A_i sur l'axe de rotation. On peut alors écrire le moment cinétique du solide : $\vec{L}_0 = \left(\sum OH_i \cdot m_i \cdot \omega \cdot r_i \right) (-\vec{e}_r) + \left(\sum m_i \cdot \omega \cdot r_i^2 \right) (\vec{e}_z)$.
 - Si l'axe de rotation est un axe de symétrie (ou axe principal d'inertie), alors $\left(\sum OH_i \cdot m_i \cdot \omega \cdot r_i \right) (-\vec{e}_r)$ s'annule et le moment cinétique s'écrit : $\vec{L}_0 = \left(\sum m_i \cdot r_i^2 \right) \omega \cdot \vec{e}_z = \left(\sum m_i \cdot r_i^2 \right) (\vec{\omega})$. $I = \sum m_i \cdot r_i^2$ s'appelle moment d'inertie.
 - Pour un cylindre de rayon r et de longueur l , on a : $I_\Delta = \frac{1}{2} m \cdot r^2 = \frac{1}{12} m \cdot l^2$.
- Pour une sphère de rayon r , on a : $I_\Delta = \frac{2}{5} m \cdot r^2$.

Théorème d'Huygens : On considère un solide et un axe de rotation Δ parallèle à un axe de principale d'inertie D , mais ne passant pas par le barycentre. On a : $I_\Delta = I_D + m \cdot a^2$, a étant la distance entre les 2 axes.

- On peut exprimer l'Energie cinétique de rotation : $E_c = \frac{1}{2} I_\Delta \cdot \omega^2$, aussi noté $E_c = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega}$

Théorème du moment cinétique : On a : $\frac{d}{dt} (\vec{L}_0) = I_\Delta \cdot \frac{d}{dt} (\vec{\omega}) = \sum \vec{M}_0$

- Pour une sphère roulant le long d'un plan incliné, la vitesse du point de contact est nulle, la vitesse du centre vaut $\omega \cdot r$, la vitesse du point à l'opposé du point de contact $2 \cdot \omega \cdot r$

IV- Collisions

- On appelle collision (ou choc) entre 2 corps solides une interaction localisée (se produit en un endroit de l'espace) et instantanée (sa durée est très courte comparée à l'échelle des temps utilisée).
 - On suppose la collision quasi-instantanée, donc $\Delta \vec{P} = \vec{0}$, donc \vec{P} se conserve au cours du choc.
- On appelle collision élastique une collision pour laquelle l'énergie cinétique totale se conserve. Sinon elle est inélastique. On dit que le choc est mou si après la collision les 2 corps n'en forment plus qu'un.

Chapitre 1

Optique géométrique

I- Nature de la lumière

- La lumière est émise par les atomes lors du passage d'un électron à un niveau d'énergie plus bas.
- La lumière se comporte comme une onde électromagnétique caractérisée par sa longueur d'onde λ . On a $\lambda = c.t$ (domaine du visible compris entre 400 et 800 nm) et $\gamma = \frac{1}{t} = \frac{c}{\lambda}$ (fréquence en Hertz). Les champs électrique et magnétique varient avec cette fréquence : $\vec{E} = E_0 \cdot e^{j.\omega.(t-\frac{z}{c})}$.
- L'œil (ou un détecteur optique) n'est pas sensible au champ électrique, mais à l'énergie (valeur moyenne du carré du champ électrique) avec $E = h.\gamma$ (h est la constante de Planck = $6,62.10^{-34}$ J.s)
- La lumière se propage en ligne droite dans un milieu isotrope et homogène. On ne peut émettre un faisceau lumineux strictement parallèle : il diffraacte. On néglige le phénomène de diffraction en optique géométrique.

II- Lois de Snell-Descartes

- La lumière se propage à une vitesse qui dépend de l'indice du milieu : $n_1 = \frac{c_0}{c_1}$. On appelle dioptre la surface de séparation entre 2 milieux et plan d'incidence le plan contenant le rayon incident et la normale au dioptre au point où arrive le rayon incident.

Lois de Snell-Descartes :

- 1) Les rayons réfléchi et réfracté sont tous les deux dans le plan d'incidence.
 - 2) Le rayon réfléchi est symétrique du rayon incident par rapport à la normale.
 - 3) La relation entre l'angle d'incidence et l'angle réfracté est : $n_1.\sin(i_1)=n_2.\sin(i_2)$
- Il y a réflexion totale si $i_1 > i_\lambda = \text{Arcsin} \frac{n_2}{n_1}$
 - Formule de conjugaison pour un dioptre plan : $\frac{n_1}{OA} = \frac{n_2}{OA'}$.
 - Application : fibre optique à saut d'indice...

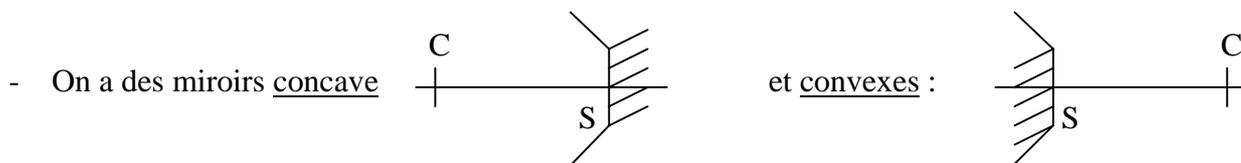
III- Miroir et stigmatisme

- L'image d'un objet par un miroir plan est symétrique de l'objet par le miroir.
- Un objet (ou image) est virtuel (>< réel) si on ne peut pas placer un écran à l'endroit où l'objet se trouve.
- Un système optique est stigmatique pour un couple (objet,image) si tout rayon lumineux passant par l'objet et entrant dans le système passe par (ou semble provenir de) l'image.

Corollaire : L'image d'un point par un système non stigmatique n'est pas un point mais une tâche.

- Un système centré possède la propriété d'aplanétisme, si l'image d'un objet perpendiculaire à l'axe optique est perpendiculaire à l'axe.
- On peut faire une approximation du stigmatisme et de l'aplanétisme si l'erreur est assez petite.
- Dans les conditions de Gauss, les objets sont petits et proches de l'axe et les angles incidents sont faibles. On peut alors approximer $\sin \alpha$ et $\tan \alpha$ par α .
- Dans un miroir sphérique, on a : $2.I\hat{C}S = S\hat{A}I + S\hat{A}'I$. Puis la relation de conjugaison pour les miroirs sphériques : $\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SA} = \frac{2}{SC}$.

IV- Relations de conjugaison (pour les miroirs)



- Le foyer d'un miroir est le point de l'axe SC conjugué d'un point de l'axe situé à l'infini. Grâce aux formules de conjugaison, on trouve : $\overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$.
 - L'image d'un objet AB perpendiculaire à l'axe est elle-même perpendiculaire à l'axe et obtenue par la construction de 3 rayons (le point B ne doit pas être sur l'axe sinon on ne peut pas construire son image directe).
 - Un miroir concave est convergent. Un miroir convexe est divergent.
 - Relations de conjugaison : on avait déjà établi que : $\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SA} = \frac{2}{SC}$.
- On trouve aussi : $\frac{1}{CA'} + \frac{1}{CA} = \frac{2}{CS} = \frac{1}{CF}$, puis $\overline{FA} \cdot \overline{FA'} = \overline{FS} \cdot \overline{FS} = \overline{SF}^2$ (formule de Descartes)
- Le grandissement noté γ est défini par : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$

V- Relations de conjugaison (pour les lentilles)

- La formule de conjugaison obtenue pour un miroir sphérique s'adapte pour un dioptré : $\frac{n_1}{SA'} - \frac{n_2}{SA} = \frac{n_1 - n_2}{SC}$.
- Une lentille est constituée de 2 dioptrés et est considérée comme mince si on néglige la distance entre les 2 sommets (épaisseur). Ex : lentilles convergentes (biconvexe, plan convexe, concavo-convexe), lentilles divergentes (biconcave, plan concave, convexo-concave).
- Relation de conjugaison : $\frac{1}{OA'} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OF'}$ où F' est le foyer image.
- La distance focale d'une lentille est la mesure algébrique $\overline{OF'}$ ou $\overline{FO} = -\overline{OF}$
La vergence est l'inverse de la distance focale (exprimée en dioptrie $\equiv m^{-1}$)
- On peut utiliser aussi la formule de Descartes : $\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = \overline{F'O} \cdot \overline{FO} = -(f')^2$
- On peut aussi exprimer le grossissement : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'A}}$

Chapitre 1

Le gaz parfait

La thermodynamique est l'étude des bilans d'énergie entre un système et l'extérieur. Les systèmes étudiés (solide, gaz, ...) comportent trop d'éléments pour que les équations de la mécanique soient utilisables : on décrit le système de manière statistique. On s'intéresse à deux états de la matière : l'état solide (les atomes ou molécules ont une position moyenne fixe les uns par rapport aux autres et vibrent autour de cette position) et l'état fluide (les atomes ou molécules sont libres de se déplacer).

I- Le gaz parfait monoatomique

- Un gaz est monoatomique si il est constitué d'un seul type d'atome célibataire.
- Un gaz monoatomique est parfait s'il est constitué d'atomes n'ayant aucune interaction entre eux. Les atomes ont uniquement des collisions avec les parois.
- On suppose de plus que le gaz est en équilibre thermodynamique local (ETL), c'est-à-dire qu'on peut trouver un volume mésoscopique, élémentaire à l'échelle macroscopique, mais grand à l'échelle microscopique pour permettre d'effectuer une moyenne sur les grandeurs des atomes : vitesse, énergie cinétique, etc. On exclue les systèmes hors équilibre tels que explosion ou détonation qui varient vite dans le temps.
- Pour décrire le comportement du gaz à l'échelle mésoscopique, on va donner la fonction de partition (distribution) des vitesses : c'est la fraction d'atomes ayant une norme de vitesse comprise entre u et $u+du$.
- Un gaz est parfait si on peut supposer l'ETL, ainsi la fonction de partition va être homogène (même valeur en tout point dans le volume mésoscopique), isotrope (indépendant de la direction) et stationnaire

(indépendant du temps). Ex : la loi de distribution de Maxwell-Boltzmann est $f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kt} \right)^{\frac{3}{2}} u^2 \cdot \exp\left(-\frac{mu^2}{2kt}\right)$

- La pression pour un fluide est la force par unité de surface exercée sur une paroi solide. Cette force est due aux collisions des atomes sur la paroi. La pression cinétique d'un gaz parfait est $p = \frac{d^2f}{dS^2} = \frac{1}{3} n_a \cdot m \cdot \overline{u^2}$ avec n_a la densité, m la masse et $\overline{u^2}$ la vitesse quadratique moyenne.
- L'énergie mécanique contenue dans un gaz parfait se trouve uniquement sous forme cinétique puisqu'il n'y a pas de forces d'interaction entre les atomes. On associe à chaque degré de liberté du gaz $\frac{1}{2} k.t$. Donc

$\overline{E_c} = \frac{1}{2} m \cdot \overline{u^2} = \frac{3}{2} k.t$ pour un gaz parfait monoatomique, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ étant la constante de Boltzmann.

- Il existe une relation entre les paramètres macroscopiques du gaz parfait (p, T, V) appelée équation d'état. En effet, on a : $p.V = n.N_a.k.T = n.R.T$, N_a étant la constante d'avogadro et $R = N_a.k = 8,31 \text{ J.K}^{-1}$ est la constante des gaz parfaits.
- On appelle énergie interne d'un gaz, l'énergie totale contenue par le gaz sous toutes ses formes. Pour un gaz parfait, l'énergie interne est la somme de l'énergie cinétique de tous les atomes. Pour un gaz parfait monoatomique, on a : $U = \frac{3}{2} n.R.T$
- On appelle grandeurs intensives des grandeurs macroscopiques définies à partir d'une moyenne (T, p) et grandeurs extensives des grandeurs macroscopiques définies à partir d'une somme (V, n, U)

II- Les autres fluides

- Pour un gaz quelconque, dont le nombre de moles est connu, la définition des grandeurs physiques ne change pas et il existe toujours une relation entre p, T et V appelée équation d'état.
- On appelle capacité thermique à volume constant la fonction $C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v$ [J.K^{-1}] et $U(T, V) \neq U(T, p)$

- Le gaz parfait diatomique est composé de molécules identiques ayant 2 atomes. On considère qu'un gaz parfait diatomique à 5 degrés de liberté. Donc son énergie interne est $U = \frac{5}{2}n.R.T$
- La capacité thermique à volume constant d'un gaz parfait vaut $\frac{3}{2}n.R$ pour un gaz monoatomique, $\frac{5}{2}n.R$ pour un gaz diatomique. On distingue $C_v = \frac{3}{2}n.R$ et $c_v = \frac{3}{2}R$ la capacité thermique molaire [$J.K^{-1}.mol^{-1}$].
On ne sait plus alors noter la capacité thermique massique $\frac{3}{2} \times \frac{R}{M}$ [$J.K^{-1}.kg^{-1}$]...
- L'équation d'état d'une mole de gaz dans le modèle de Van der Waals s'écrit : $(p + \frac{a}{V_1^2}).(V_1 - b) = R.T$, a et b (le covolume) étant des termes correctifs dépendant de la nature du gaz. Pour n moles, on aura : en posant $V = n.V_1$, $(p + \frac{a.n^2}{V^2}).(\frac{V}{n} - b) = R.T$.
- Pour décrire le comportement des autres fluides on utilise les coefficients thermoélastiques : le coefficient de dilatation isobare $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$, le coefficient de compressibilité isotherme $\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$ et $\beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$. On a une relation entre ces 3 termes : $\alpha = \beta.\kappa.p$

III- Loi de l'hydrostatique

- La somme des forces de pression s'exerçant sur un volume élémentaire d^3V vaut $\sum \overrightarrow{F}_{pression} = -\overrightarrow{grad} p . d^3V$

Loi de l'hydrostatique : Dans un fluide en équilibre, le gradient de la pression dans le fluide est égal aux forces volumiques (autres que les forces de pression) s'appliquant sur le fluide : $\overrightarrow{grad} p = \overrightarrow{f}_V$.

- Par exemple, dans l'eau, on a : $p(z) = p_0 + \rho_{eau} . g . z$ où p_0 vaut 1 atm ou 10^5 Pa.

Poussée d'Archimède : Tout corps plongé dans un liquide subit une force dirigée vers le haut égale en norme au poids du volume de liquide déplacé.

I- Description d'un système

- Les limites d'un système définissent le sujet d'étude sur lequel on applique les principes. Le système peut être ouvert (échange de matière possible avec l'extérieur) ou fermé. Les frontières du système peuvent être adiabatiques (on néglige les transferts thermiques du système avec l'extérieur) ou diathermes (diathermanes). On examine également la mobilité des frontières du système, le travail des forces de pression étant dans ce cas non nul.
- Le système va passer d'un état initial à un état final au cours d'une transformation. Un état est défini par ses paramètres d'état (p,V,T), eux-mêmes définis lorsque le système est en ETL. Ainsi l'état initial et l'état final sont des états d'équilibre (au sens thermodynamique).
- Les transformations peuvent être lentes ou brutales. Si elles sont lentes, elles sont quasi-statiques.
- Les transformations peuvent aussi être isothermes ($T = \text{cte}$), isobares ($p = \text{cte}$), isochores ($V = \text{cte}$), monothermes ($T_i = T_f$), monobares ($p_i = p_f$), monochores ($V_i = V_f$). Les transformations isothermes et isobares sont généralement quasi-statiques.

II- Le 1^{er} Principe

1^{er} Principe : Au cours de la transformation, d'un système thermodynamique d'un état d'équilibre A vers un état d'équilibre B, la somme des transferts thermiques et du travail des forces échangés avec l'extérieur ne dépend pas du processus utilisé au cours de la transformation. Cette somme est égale à la variation d'énergie interne.

- On a donc : $\Delta U = W + Q$, soit au niveau élémentaire : $dU = \delta W + \delta Q$. On déduit $Q = \Delta U - W$.
- On peut reformuler le premier principe : U est une fonction d'état...
- On distingue trois processus de transferts d'énergie : la convexion (mode de transfert interne par transport de matière dans les fluides), la conduction (mode de transfert par contact dont les caractéristiques dépendent des propriétés du matériau) et le rayonnement (transport par onde électromagnétique).
- On a : $W = \int_A^B P \cdot dt = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$. D'où : $\delta W = -p_{ext} \cdot dV$

III- Le 2nd Principe

- Le premier principe ne permet pas de rendre compte de tous les phénomènes observés : sens des transferts thermiques par conduction par exemple.
- Un observateur extérieur compte le nombre d'atomes présents dans un compartiment sans pouvoir les discerner. Le résultat est un macroétat du système. Le microétat correspondant au macroétat mesuré consiste à savoir quels sont les atomes dans le compartiment, donc à les discerner. Soit Ω le nombre de microétats correspondant à un macroétat donné.
- On suppose que tous les microétats sont équiprobables (hypothèse ergotique).
- Entropie : $S = k \cdot \ln(\Omega)$, nombre de microétat correspondant à un macroétat donné.

2nd principe : Pour un système isolé, l'entropie augmente au cours de la transformation. L'équilibre du système est atteint lorsque l'entropie est maximale.

I- La Fonction enthalpie

- Détente de Joule-Gay-Lussac : Détente d'un gaz contre le vide.
 - $U_{\text{syst}} = U_{\text{gaz}} + U_{\text{vide}} = U_{\text{gaz}}$. D'où $\Delta U=0$, c'est une détente isoénergétique.
 - Un gaz parfait subit une détente de Joule-Gay-Lussac sans variation de température car $U=n.C_v.t$
- Evolution monobare d'un système : $P_A=P_{\text{ext}}$ et $P_B=P_{\text{ext}}$.
 - Le travail des forces de pression est alors : $F = \int_A^B -P_{\text{ext}}.dv = P_A.V_A - P_B.V_B$.
 - Puis : cf 1^{er} principe, $\Delta U=W+Q$. D'où : $Q=\Delta H$.
 - On définit la fonction d'état enthalpie, notée H, par : $H=U+P.V$
 - Lors d'une transformation monobare, le transfert thermique est égal à la variation d'enthalpie.
- Détente de Joule-Thomson ou Joule-Kelvin : Détente d'un gaz à travers une paroi poreuse ou un étranglement.
 - $\Delta U=W+Q=W=P_1.V_1-P_2.V_2$. D'où $\Delta H=0$, c'est une détente isenthalpique.
 - Un gaz parfait subit une détente de Joule-Thomson sans variation de température, car $H=(n.C_v+n.R).T$

II- Calorimétrie

- $C_p=(\delta H / \delta T)_p$ [J.K⁻¹] est la capacité thermique à pression constante.
- Pour liquides ou solides : on a $C_p=C_v=C$, $dU=m.C.dT$
- Relation de Mayer : $U=n.C_v.T$, $H=n.C_p.T$, $P.V=n.R.T$ et $H=U+P.V$. D'où : $C_p-C_v = R$.
- On caractérise un gaz parfait par son coefficient isentropique : $\gamma=C_p/C_v$. Puis $C_v=R/(\gamma-1)$ et $C_p=\gamma.R/(\gamma-1)$. Pour gaz parfait monoatomique, on a $\gamma=5/3$. Pour un gaz parfait diatomique, on a : $\gamma=7/5$.

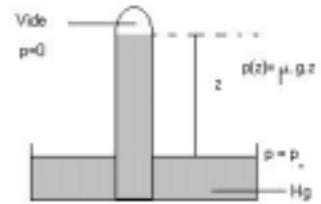
III- Bilans d'entropie

- La transformation est dite réversible
 - si on peut changer le sens des échanges d'énergie à chaque instant.
 - si on peut négliger les frottements qui s'exercent sur le système.
 - une transformation réversible est forcément quasi-statique (donc lente). L'inverse est faux !
- Identités thermodynamiques :
 - $dU=T.dS-P.dV$
 - $dH=T.dS+V.dP$
- $dS=n.C_v.dT/T+P.dV/T \Rightarrow S=(n.R/(\gamma-1)).\ln(T.V^{(\gamma-1)})+cte=(n.R/(\gamma-1)).\ln(P.V^\gamma)+cte$
 - Transformation isentropique d'un gaz parfait, loi de Laplace : $P.V^\gamma=cte$
 - $dT/T=dP/P+dV/V$
- Au cours d'une transformation réversible où n'interviennent que les forces de pression, la variation d'entropie est égale à : $\Delta S = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}$
- Un thermostat est un système de très grande capacité thermique dont on suppose la variation de température négligeable au cours de la transformation, $dU=C.dT$ (liquide ou solide)
- Inégalité de Carnot-Clausius : $dS \geq \frac{\delta Q}{T_{\text{source}}}$.
- Bilan : $\Delta S = S_e + S_c$ où S_e est l'entropie d'échange $\frac{\delta Q}{T}$ et S_c l'entropie créée (positive ou nulle)

I- Introduction

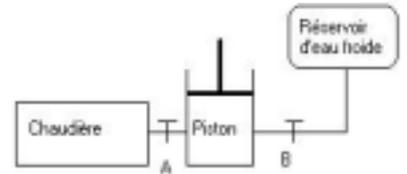
- Fonctionnement du baromètre à mercure :

- ⇒ La hauteur de mercure est directement proportionnelle à P_0 .
- ⇒ On a : 1 bar $\Leftrightarrow 10^5$ Pa $\Leftrightarrow 76$ cm de Mercure $\Leftrightarrow 10,2$ m d'eau.



- Première machine à vapeur en Angleterre (1712)

- ⇒ Dans la chaudière, on chauffe de l'eau.
- ⇒ A est ouvert et B est fermé : la vapeur repousse le piston vers le haut
- ⇒ A est fermé et B est fermé : on bloque le piston en position haute.
- ⇒ A est fermé et B est ouvert : l'eau froide refroidit la vapeur et la presse
- ⇒ On débloque le piston : la pression atmosphérique enfonce le piston



- En 1770, James Watt invente le condenseur : la vapeur d'eau est refroidie dans le condenseur ; ainsi, le cylindre reste chaud et est prêt à fonctionner de nouveau. Le gain en énergie est énorme !

- En 1824, Sadi Carnot invente le concept d'entropie pour expliquer le rendement de la machine à vapeur.

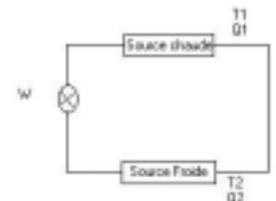
II- Cycle et Réversibilité

- Une machine thermique fonctionne de façon cyclique. Dans la machine à vapeur, c'est l'eau qui décrit un cycle : eau liquide => vapeur => pousse le piston => eau liquide. Au cours d'un cycle, les variations des fonctions d'état du système décrivant le cycle sont nulles : $\Delta U_{\text{cycle}}=0$ et $\Delta S_{\text{cycle}}=0$.

- Une machine motrice ne peut fournir de travail que si elle échange un transfert thermique avec 2 sources de chaleur... En effet, supposons qu'une machine motrice $W < 0$ et qu'elle échange de l'énergie thermique avec une seule source de chaleur. Alors, le 1^{er} principe donne $Q = -W > 0$ puis $\Delta S_{\text{tout}} = Q_{\text{source}}/T_{\text{source}}$. D'où enfin : $\Delta S_{\text{tout}} = -Q/T < 0$. Ainsi le second principe empêche la machine de fonctionner.

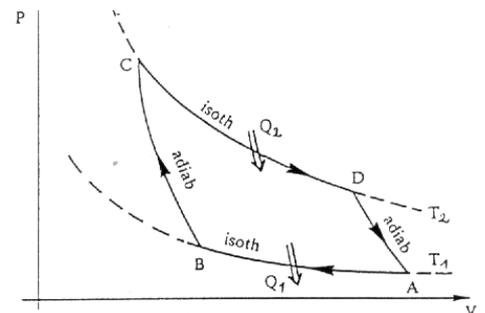
- Machine motrice : $W < 0$, $Q_1 > 0$ et $Q_2 < 0$

- ⇒ 1^{er} principe et $\Delta U_{\text{cycle}} = 0$, d'où : $Q_1 + Q_2 = -W$
- ⇒ 2nd principe : $\Delta S_{\text{tout}} = \Delta S_{\text{cycle}} + \Delta S_1 + \Delta S_2 = -Q_1/T_1 - Q_2/T_2 \geq 0$
- ⇒ Or rendement : $rt = E_{\text{reçue}}/E_{\text{fournie}} = |W/Q_1| = -W/Q$
- ⇒ D'où $rt \leq 1 - T_1/T_2$ (rendement de Carnot)



- Machine frigorifique : $W > 0$, $Q_1 < 0$, $Q_2 > 0$

=> De la même façon, on obtient l'efficacité : $Eff \leq T_2/(T_1 - T_2)$

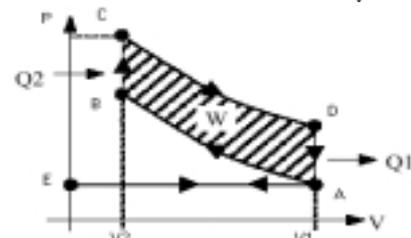


III- Exemples

- Cycle de Carnot : cycle d'un moteur fonctionnant de façon réversible (sans frottement et les 2 systèmes sont à la même température. Ce cycle se compose de deux adiabatiques ($P.V^\gamma = \text{cte}$) et deux isothermes ($P.V = \text{cte}$)

- Cycle de Beau de Rochas : cycle d'un moteur à explosion à essence en 4 temps

- ⇒ Admission isobare: le mélange air-essence pénètre dans le cylindre.
- ⇒ Compression adiabatique: le piston comprime le mélange.
- ⇒ Explosion isochore due à la bougie + Détente adiabatique puis isochore
- ⇒ Echappement : le piston pousse le mélange brûlé hors du cylindre.



NB : On note $a = V_1/V_2$ le rapport de compression. Le rendement théorique est al...

Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss sert à calculer le champ électrique créé par une distribution de charges. Ainsi, il relie la cause (les charges) à la conséquence (le champ).

I – Démonstration du théorème de Gauss :

1. Angle solide

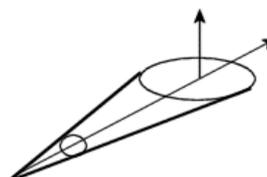
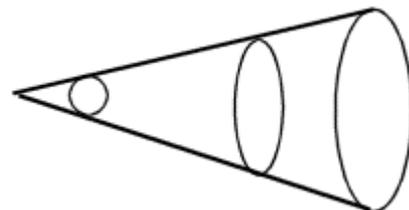
Tout comme dans un plan, on peut définir un angle de l'espace :

l'angle solide. Il correspond à une portion d'espace : $\Omega = \frac{\Sigma}{R^2}$.

On l'exprime en stéradian (sr) et l'angle solide de tout l'espace vaut 4π (sr).

On peut aussi définir l'angle solide élémentaire :

$$d\Omega = \frac{dS \cdot \cos\theta}{r^2} = \frac{dS \cdot \vec{n} \cdot \vec{u}}{r^2}$$



2. Flux d'un champ de vecteur

Soit un champ de vecteur \vec{E} prenant la valeur $\vec{E}_{(M)}$ en un point M d'une surface S. On appelle flux élémentaire de \vec{E} à travers l'élément de surface $\epsilon_{(M)}$ le produit scalaire : $d\Phi = \vec{E}_{(M)} \cdot d\vec{S}_{(M)}$.

Le flux du champ \vec{E} à travers la surface S est défini par : $\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

3. Flux d'un champ créé par une charge à travers une surface fermée

On part de la loi de Coulomb : $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$. Donc $d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \cdot d\vec{S}$, puis $d\Phi = \frac{q \cdot d\Omega}{4\pi\epsilon_0}$.

Si la surface S fermée contient le point O, alors : $\Phi = \oiint_S d\Omega = \oiint_S \frac{q \cdot d\Omega}{4\pi\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$

Si la surface S fermée ne contient pas O, alors $\Phi = 0$ car le flux entrant par une demi-surface sort par l'autre demi-surface.

Par superposition s'il y a plusieurs charges, on en déduit le théorème de Gauss :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

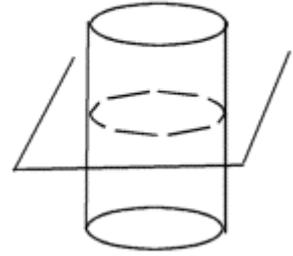
II – Exemple d'application : Plan infini uniformément chargé :

On considère un plan infini uniformément chargé.

Par des considérations symétriques, on trouve que $\vec{E} = E(z) \cdot \vec{u}_z$.

On applique alors le théorème de Gauss : $\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$.

On prend un cylindre pour surface de Gauss.



On a alors $d\Phi(\vec{E}) = 2 \cdot E \cdot dS$. Or, d'après le théorème de Gauss : $d\Phi(\vec{E}) = \frac{\sigma \cdot dS}{\epsilon_0}$

D'où : $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \vec{u}_z$ pour $z > 0$ et $\vec{E}(M) = \frac{-\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \vec{u}_z$ pour $z < 0$.

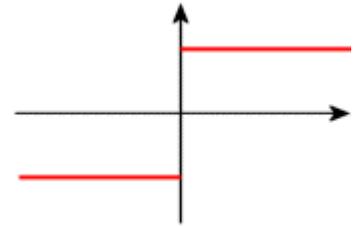
En $z = 0$, la symétrie de la distribution impose $\vec{E}(O) = \vec{0}$

III – Conséquence : Discontinuité du champ électrostatique traversant une surface chargée :

L'exemple précédent met bien en évidence la discontinuité du champ électrostatique à la traversée d'un plan uniformément chargé. En considérant deux points M et M' de chaque côté de la surface, on a :

$\vec{E}(M) - \vec{E}(M') = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$.

Cette discontinuité est parfaitement illustrée par le graphe de $E(z)$:

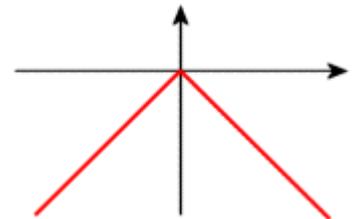


Il est important de noter néanmoins que le potentiel est lui continu :

Le potentiel $V(z)$ se déduit de \vec{E} grâce à $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$. D'où $V(z) = -\int E(z) \cdot dz + \text{cte}$.

On a alors : $V(z) = -\frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} z$ pour $z > 0$ et $V(z) = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} z$ pour $z < 0$

D'où le graphe de $V(z)$:



Conclusion : Ce théorème peut se démontrer encore plus facilement par les équations de Maxwell, et on prouve qu'il est toujours vrai en régime variable (pour des charges en mouvement). Il est donc plus général que la loi de Coulomb.

Poids d'un corps

I-Généralités et définition.

On appelle **poids d'un corps** \vec{P} , en un point d'un système de référence, l'opposé de la tension \vec{F} du fil qui maintient cette masse, supposée dans le vide, en équilibre dans ce système de référence : $\vec{P} = -\vec{F}$.

La direction prise par le fil définit la **verticale** du lieu dans ce système.

Choisissons pour **repère terrestre** \mathcal{R}_T un repère dont l'origine est située en un point 0 de la Terre et dont les axes sont liés à la Terre.

Considérons un fil à plomb en équilibre dans ce référentiel. Pour l'étude de ce corps maintenu en équilibre par la seule action du fil auquel il est attaché, on ne peut considérer le référentiel terrestre comme galiléen puisqu'il est animé par rapport au référentiel géocentrique d'un mouvement de rotation autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire ω_T . En revanche on peut considérer ici le **référentiel géocentrique** \mathcal{R}_G comme galiléen.

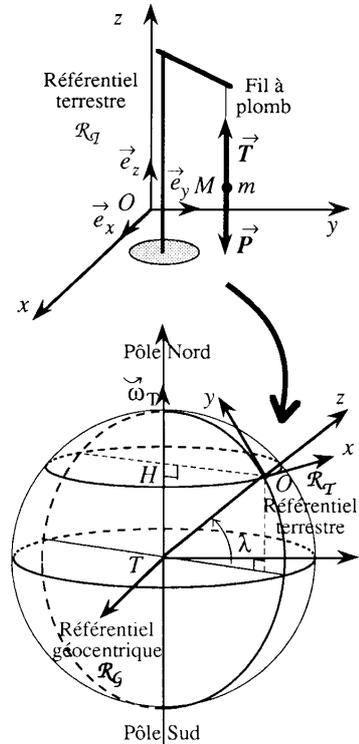
Les forces appliquées au point matériel de masse m sont, d'une part la tension \vec{F} du fil et d'autre part la résultante des forces de gravitation $m\vec{\zeta}$ où le champ de gravitation $\vec{\zeta}$ est dû à l'action de tous les points de l'univers en ce lieu. La condition nécessaire d'équilibre dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_T , non galiléen, pour ce corps de masse d'inertie m , est :

$$\Sigma \vec{F} + \vec{F}_e = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{F} + m\vec{G} - m\vec{a}_e = \vec{0}}$$

Il est raisonnable de négliger l'attraction des astres autres que la Terre.

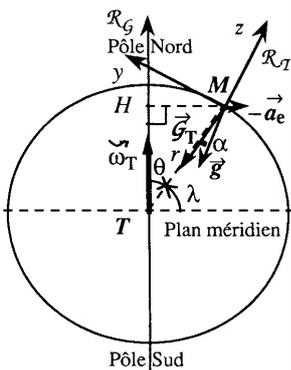
Le champ de pesanteur terrestre \vec{g} en un point M est, en première approximation, la somme de deux termes, un terme gravitationnel terrestre $\vec{G}_T(M)$ et un terme centrifuge $\omega_T^2 \vec{HM}$ égal à l'opposé de l'accélération d'entraînement du point M du référentiel terrestre :

$$\vec{g} = \vec{G} - \vec{a}_e \approx \vec{G}_T + \omega_T^2 \vec{HM}$$



II- Influence du terme centrifuge.

L'expression du champ de pesanteur au point M est : $\boxed{\vec{g} = \vec{G} - \vec{a}_e \approx \vec{G}_T + \omega_T^2 \vec{HM}}$



On a donc $\vec{a}_e = -\omega_T^2 \vec{HM} \Rightarrow \vec{a}_e = \omega_T^2 R_T \cos \lambda$. a_e est maximale pour $\cos \lambda = 1$ donc pour M à l'équateur. On a alors :

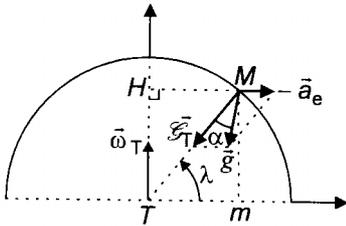
$$a_{e \max} = \omega_T^2 R_T = 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Ce terme est, en première approximation, négligeable devant la valeur de l'accélération de pesanteur la plus souvent utilisée, qui est $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, correspondant à la valeur de g au niveau de la mer et à 45° de latitude ($\lambda = \pi/4$).

Dans la suite, on pourra considérer que $\frac{a_e}{g_0} \approx \frac{a_e}{g_T} \ll 1$

III- Variations du champ de pesanteur avec la latitude.

On cherche ici une expression simple de la valeur du module du champ de pesanteur au niveau de la mer, en fonction de la latitude λ du point considéré et de g .



$$g^2 = \mathcal{E}_T^2 - 2\mathcal{E}_T a_e \cos \lambda + a_e^2 = \mathcal{E}_T^2 \left(1 - 2 \frac{a_e}{\mathcal{E}_T} \cos \lambda + \left(\frac{a_e}{\mathcal{E}_T} \right)^2 \right), \text{ soit}$$

$$g = \mathcal{E}_T \left(1 - 2 \frac{a_e}{\mathcal{E}_T} \cos \lambda + \left(\frac{a_e}{\mathcal{E}_T} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \approx \mathcal{E}_T \left(1 - \frac{a_e}{\mathcal{E}_T} \cos \lambda \right) \Rightarrow \mathbf{g} \approx \mathcal{E}_T - a_e \cos \lambda, \text{ en ne}$$

conservant que les termes de degré inférieur ou égal à 1 en $\frac{a_e}{\mathcal{E}_T}$. On a donc :

$$g \approx \mathcal{E}_T - a_e \cos \lambda = \mathcal{E}_T - \omega_T^2 R_T \cos^2 \lambda. \text{ Cette relation écrite pour } \lambda = \frac{\pi}{4} \text{ donne :}$$

$$g_0 = \mathcal{E}_T - \frac{1}{2} \omega_T^2 R_T, \text{ et on peut éliminer } \mathcal{E}_T \text{ entre ces deux relations :}$$

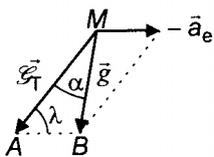
$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \frac{1}{2} \omega_T^2 R_T (1 - 2 \cos^2 \lambda).$$

De cette manière, on peut déterminer les valeurs de g à l'équateur et aux pôles :

$$\mathbf{g}_e = 9,790 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ et } \mathbf{g}_p = 9,824 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

IV- Influence du terme centrifuge sur la direction de la verticale à un lieu.

La question est ici de déterminer l'angle α que fait la verticale en un point de la surface terrestre, où elle est déterminée par la direction du fil à plomb, avec le rayon terrestre.



On utilise ici la relation d'Al-Kashi dans le triangle MAB :

$$\frac{\sin \alpha}{a_e} = \frac{\sin \lambda}{g} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a_e}{g} \sin \lambda \approx \frac{a_e}{g_0} \sin \lambda \text{ à l'ordre 1 en } \frac{a_e}{g_0}.$$

$$\text{Finalement : } \sin \alpha = \frac{\omega_T^2 R_T}{g_0} \cos \lambda \sin \lambda \Rightarrow \mathbf{\sin \alpha = \frac{\omega_T^2 R_T}{2g_0} \sin 2\lambda}.$$

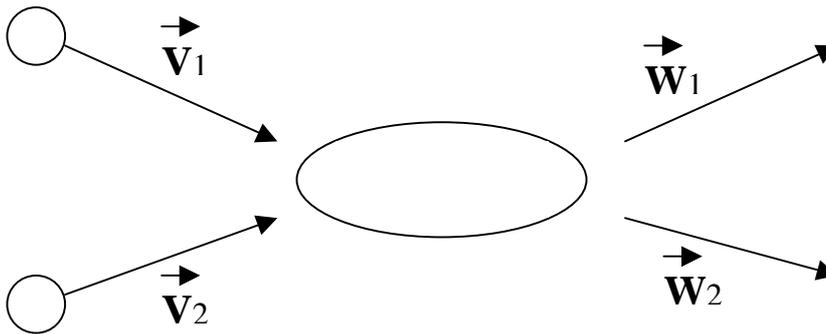
$$\sin \alpha \text{ et donc } \alpha \text{ est maximal pour } \lambda = \frac{\pi}{4} \text{ et } \alpha_{\max} = \arcsin \left(\frac{\omega_T^2 R_T}{2g_0} \right)$$

$$\text{Le calcul donne : } \alpha_{\max} = 1,73 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \approx 6'.$$

Cet angle est très petit et c'est une excellente approximation que de confondre la verticale d'un lieu avec la droite reliant ce lieu au centre de la terre.

Choc de deux particules

1) Choc ponctuel entre particules.



Définition : Choc = interaction brève et intense entre deux points matériels qui provoque une modification quasi instantanée de leur vitesse.

Force de collision :

Choc entre M1 et M2 entre les instants $t=0$ et $t=\tau$ où τ est la durée de la collision.

Sur M1 s'exercent : - f_c : force de collision due à M2

- f_e : forces extérieures

Le PFD appliqué à M1 donne : $m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{f}_c + \vec{f}_e \Rightarrow m_1 d\vec{v}_1 = (\vec{f}_c + \vec{f}_e) dt$

On intègre sur la durée du choc : $m_1(\vec{w}_1 - \vec{v}_1) = \int_0^\tau \vec{f}_c dt + \int_0^\tau \vec{f}_e dt$

Puis en prenant les valeurs moyennes : $m_1(\vec{w}_1 - \vec{v}_1) = \tau \langle \vec{f}_e \rangle + \tau \langle \vec{f}_c \rangle$ avec $\tau \langle \vec{f}_e \rangle \rightarrow 0$ car $\langle \vec{f}_e \rangle$ est bornée.

D'où l'expression de la force de collision : $\langle \vec{f}_c \rangle = \frac{m_1(\vec{w}_1 - \vec{v}_1)}{\tau}$

Remarque : on voit que $\langle \vec{f}_c \rangle$ augmente si τ diminue, et que $\langle \vec{f}_c \rangle \gg \langle \vec{f}_e \rangle$.

2) Conservation de la quantité de mouvement du système des 2 particules en collision.

\vec{P} = quantité de mouvement du système entier {M1+M2}

On a : $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_e \Rightarrow \Delta\vec{P} = \tau \langle \vec{F}_e \rangle = 0$ (car $\langle \vec{F}_e \rangle$ est bornée et $\tau \rightarrow 0$).

D'où, pendant le choc : $\vec{P} = cste$ Tout se passe comme si, pendant la durée du choc, on avait un **système isolé**. Finalement, on a **conservation de la quantité de mouvement** du système :

$$\vec{P}_f = \vec{P}_i \Leftrightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{w}_1 + m_2 \vec{w}_2$$

validité : pour τ petit

3) Choc élastique de deux particules. (le programme se limite à ce cas)

Définition : Un choc est dit « **élastique** » si l'énergie totale K du système reste conservée au cours du choc. $K = cste$

→ on néglige l'action des forces extérieures au système.

→ on considère qu'il n'y a pas de forces d'interaction dissipatives (notamment pertes thermiques pendant le choc). soit : $W_{int} = W_{ext} = 0 \Rightarrow \Delta K = 0$

Indétermination : Généralement, on cherche \vec{w}_1 et \vec{w}_2 , soit 6 inconnues scalaires.

Or on dispose de : $\left. \begin{array}{l} \vec{P} = \vec{cste} \\ K = cste \end{array} \right\}$ soit 4 équations scalaires.

D'où une indétermination, qu'on lèvera en fixant 2 paramètres liés à \vec{w}_1 et \vec{w}_2 .

4) Exemples.

☑ Choc frontal.

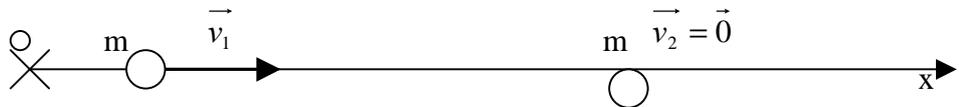


$$\left. \begin{array}{l} \vec{P} = \vec{cste} \\ K = cste \end{array} \right\} \text{ donne après un calcul très simple : } w_1 = \frac{1 - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} v_1 \text{ et } w_2 = \frac{2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} v_1.$$

Remarque : si $m_1 = m_2$ il y a « échange des vitesses ».

si $m_2 \gg m_1$ M_1 rebondit sur M_2 .

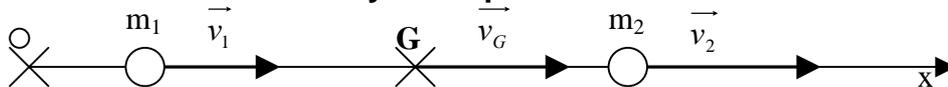
☑ Choc latéral.



On prend ici $m_2 = m_1 = m$.

$\left. \begin{array}{l} \vec{P} = \vec{cste} \\ K = cste \end{array} \right\}$ donne $\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_1 = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \\ v_1^2 = w_1^2 + w_2^2 \end{array} \right.$ d'où $\left\{ \begin{array}{l} v_1^2 = w_1^2 + w_2^2 + 2\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 \\ v_1^2 = w_1^2 + w_2^2 \end{array} \right.$. Finalement : $\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = 0$. Les trajectoires des deux particules après le choc sont orthogonales.

☑ Utilisation du référentiel barycentrique.



Dans le référentiel barycentrique, la quantité de mouvement du système $\{M_1+M_2\}$ est :

$$\vec{P}^* = (m_1 + m_2)\vec{v}_G = \vec{0}, \text{ d'où } \vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = \vec{q}_1^* + \vec{q}_2^* = \vec{0} \text{ (en notant } q \text{ les quantités de mouvement}$$

après le choc). De plus, le choc est élastique donc : $K^* = \frac{p_1^{*2}}{2m_1} + \frac{p_2^{*2}}{2m_2} = \frac{q_1^{*2}}{2m_1} + \frac{q_2^{*2}}{2m_2}$.

De ces relations, on tire : $\vec{p}_2^* = -\vec{p}_1^*$ et $\vec{q}_2^* = -\vec{q}_1^*$ puis $p_1^{*2} = q_1^{*2}$ et $p_2^{*2} = q_2^{*2}$

Ainsi, dans le référentiel barycentrique, on a :

→ égalité des normes des quantités de mouvement : $\|\vec{p}_1^*\| = \|\vec{p}_2^*\| = \|\vec{q}_1^*\| = \|\vec{q}_2^*\|$.

→ conservation de la norme de la vitesse : $v_1^* = w_1^*$ et $v_2^* = w_2^*$.

